

Ein Kartentrick und etwas Codierungstheorie

Martin Hofmann

15. April 2014

Kartentrick

Diese Folie wurde nicht gezeigt.

- Zu Beginn wird ein Kartentrick aus “Computer Science Unplugged” von Witten und Fellows (csunplugged.org) vorgeführt.
- Zu 25 rot/weißen Karten werden an den Rändern 11 weitere dazugelegt, so, dass die Anzahl der roten Karten in jeder Zeile und Spalte gerade ist.
- Wird nun eine Karte von rot auf weiß (oder umgekehrt) umgedreht, so kann man das an der Verletzung der Parität erkennen.
- Nach 2-3 Durchgängen kommen die Zuhörer auf das Prinzip und können den Trick selber durchführen.
- Anschl. Übergang zum eigentlichen Folienvortrag

Information durch Bits codieren

Zahlen und Buchstaben kann man als Nullen und Einsen darstellen, z.B.:

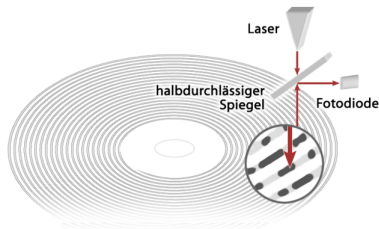
61 = 111101 (= ■■■■■□■)

a = 97 = 1100001 (= ■■□□□□■)

b = 98 = 1100010 (= ■■□□□■□)

0 kann bedeuten “Karte weiß”, “Strom an”, “Laser wird reflektiert”, ...

1 kann bedeuten “Karte rot”, “Strom aus”, “Laser wird nicht reflektiert”, ...



Übertragungsfehler

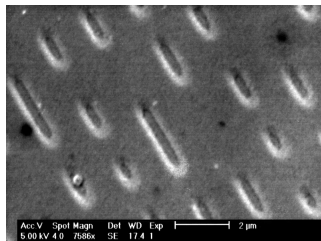
Fehler: wird das dritte Bit von $a=1100001$ “aus Versehen” zu 1
 umgeändert (■■■■), dann wird aus dem a ein q .
 Mit unseren 25 Karten können wir 3 Buchstaben darstellen.
 Spendieren wir noch die 11 extra Karten am Rand, dann
 können wir 1 fehlerhaftes Bit korrigieren. Selbst dann, wenn der
 Fehler in den Prüfbits (=Karten am Rand) auftritt.

Fehler korrigieren: CD-Spieler

Beim Aufnehmen einer CD werden Musikinformationen zuerst digital umgewandelt.

40.000 mal pro Sekunde werden 2×16 Bit Toninformation abgetastet.

Jeweils 6 von diesen 32 Bit "Samples" werden zu einem 192 Bit Block zusammengefasst. Dazu kommen 64 Prüfbits, mit denen sich bis zu 24 Fehler (bis zu 24 von den 192+64) korrigieren lassen.



CD - Kodierung: Kratzer und Schmutz

- Vor der Kodierung wird die Information ausgewalzt und verschachtelt.
- Dadurch wirken sich große Fehler (Kratzer, Schmutz) weniger schlimm aus. Das wird gleich erklärt.
- Das ist immer noch nicht alles. Wer's genau wissen will, muss bei Google nachschauen.

Was tun gegen Kratzer

Botschaft:

WARMER APFELKUCHEN

Was tun gegen Kratzer

Botschaft mit "Kratzer":

WARMER KUCHEN



Quelle: Wikipedia.org

Was tun gegen Kratzer

Botschaft ausgewalzt und verschachtelt:

WPHEKA FERURENACML

Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben ist immer 5: Das W steht an erster Stelle, das A an 6. Stelle, das R an 11. Stelle, das M an 16. Stelle, das E an 4. Stelle (wenn man hinten 'rausfällt, vorne wieder anfangen), das R an 9. Stelle, usw.

Dass alle Buchstaben so drankommen, liegt daran, dass es 17 Buchstaben sind und 5 teilerfremd zu 17 ist.

Was tun gegen Kratzer

Ausgewalzte Botschaft mit "Kratzer":

WPHEKA ■■■■■ENACML

Was tun gegen Kratzer

Auswalzung rückgängig gemacht:

WA ■ ME ■ AP ■ ELK ■ CH ■ N

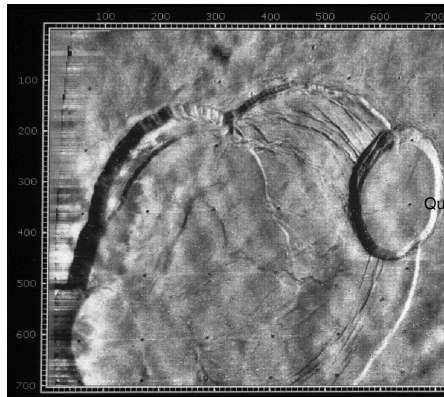


Quelle: Wikipedia.org

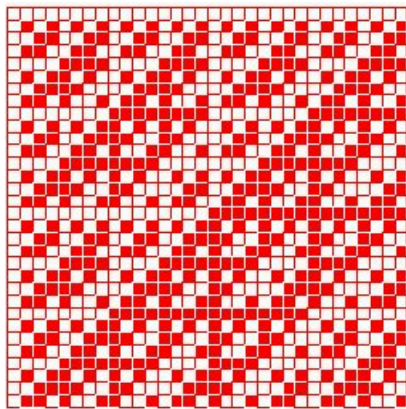
Ein einfacheres Beispiel: Marssonde

Die Sonde “Mariner deep space probe” funkte zwischen 1969 und 1977 Bilder vom Mars zur Erde. Ein Bild ist eine Folge von Pixeln.

Jeder Pixel kann einen von 32 verschiedenen Grauwerten haben. Man könnte solch einen Grauwert durch 5 Bit codieren. Weil auf dem Weg zur Erde viele Fehler passieren können, spendiert man 32 Bit für einen Pixel.



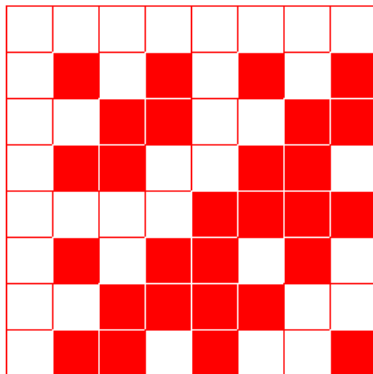
(32,5) Reed-Muller Code



Der n -te Grauwert wird durch die n -te Zeile repräsentiert. (Rot=1, Weiß=0).

Je zwei Zeilen unterscheiden sich in genau sechzehn Stellen. Sieben Fehler können so korrigiert werden.

Langsam zum Mitschreiben



Das oberste Sechzehntel des (32,5)-RM-Codes: Je zwei Zeilen unterscheiden sich in 4 Positionen.

Die Quadrate links-oben, rechts-oben, links-unten sind gleich. Das Quadrat rechts unten hat die Farben vertauscht.

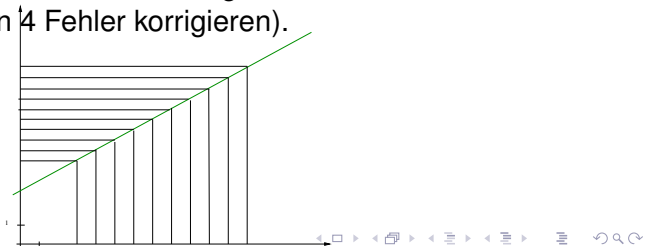
Reed-Solomon Code

- Der Reed-Muller Code wurde um 1980 durch den Reed-Solomon Code ersetzt, der günstigere Eigenschaften hat, aber 1970 noch nicht schnell genug dekodiert werden konnte.
- Der Reed-Solomon Code findet bis heute Verwendung, z.B. in der CD, beim Mobilfunk, bei Digitalfernsehen.
- Vorteile: flexiblere Formate, schnellere Algorithmen, bessere Auslastung.

[Fotografie von Irving Reed und Gustave Solomon]

Idee des Reed-Solomon Code

- Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.
- Legt man z.B. 10 Stützstellen ein für alle Mal fest, so kann man 2 Zahlen (Steigung und y-Abschnitt) auf 10 Zahlen aufblähen.
- Beispiel:
 - Stützstellen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.
 - "Botschaft": (2.8,0.5)
 - "Codierung": (4.3, 4.8, 5.3, 5.8, ...)
- Je zwei verschiedene Codierungen unterscheiden sich an 9 Stellen (kann 4 Fehler korrigieren).



In der Praxis

- Geraden \rightarrow Parabeln, beliebige Polynome
- reelle Zahlen \rightarrow endliche Körper (gegeben durch Bitfolgen)

[Bild: “Reed-Solomon is easy”]

Fehler erkennen: ISBN Codes

Bücher haben eine ISBN Nummer, zum Beispiel: ISBN 0-13-911991-4.

Die ersten neun Ziffern haben eine Bedeutung, die nur Buchhändler kennen.

Die letzte Ziffer ist eine Prüfziffer. Sie wird so berechnet:

$$0 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 9 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 172$$

Der Rest von 172 bei Division durch 11 ist 7: Die Prüfziffer ist $11 - 7 = 4$.

Stimmt die vorhandene Prüfziffer nicht mit der berechneten überein, dann ist die ISBN Nummer falsch. Korrigieren kann man sie dann nicht, aber immerhin rückfragen.

Frage: Gibt es eine andere ISBN Nummer, die auch die Prüfziffer 4 hat?

Frage: Warum nimmt man nicht einfach die Quersumme und dann den Rest bei Division durch 11?